$\sigma \colon A \to B$

$\sigma \subseteq A \times B$

$\sigma^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in \sigma\}$

$\sigma : A \to B \wedge r : \Gamma \to \Delta$

$r \circ \sigma = \{(x,y) \in A \times \Delta : (\exists z \in B \cap \Gamma)$

$x \sigma z \wedge z r y\}$

$(r \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ r^{-1}$

τυχον $x, y \in (r \circ \sigma)^{-1}$

$x, y \in r \circ \sigma \Rightarrow x, y \in r^{-1} \circ \sigma^{-1}$

▸ <u>Διμελής σχέσης</u>

$\sigma : E \to E$ ή $\sigma \subseteq E \times E$

σ ανακλαστική $\Leftrightarrow (\forall x \in E)\ (x, x) \in \sigma$
αυτοπαθής

$E = \{a, \beta, \gamma, \delta\}$, $\sigma \subseteq E \times E$ είναι διμελής

$\sigma = \{(a, a), (\gamma, \delta), (\beta, \beta), (a, \delta)\}$ ← δεν είναι συμμετρική

~~δεν είναι ανακλαστική~~

η διαγώνιος : $\Delta = \{(a, a), (\beta, \beta), (\gamma, \gamma), (\delta, \delta)\}$

δεν είναι ανακλαστική γιατί δεν περιέχει τη διαγώνιο

σ συμμετρική $\Leftrightarrow [\forall x, y \in E]\ x \sigma y \Rightarrow y \sigma x$
$x, y \in \sigma \Rightarrow (y, x) \in \sigma$

$\hat{\sigma} = \{(\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$ είναι συμμετρική

σ αντισυμμετρική $\Leftrightarrow [(\forall x, y \in E)\ x\sigma y \wedge y\sigma x \Rightarrow x = y]$

$\sigma = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \gamma), (\gamma, \delta)\}$

είναι αντισυμμετρική

$\sigma = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \gamma), (\gamma, \delta), (\gamma, \beta)\}$

δεν είναι αντισυμμετρική

$\hat{\sigma} = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)\} \Rightarrow$ συμμετρική και αντισυμμετρική

σ μεταβατική $\Leftrightarrow [(\forall x, y, z \in E)\ x\sigma y \wedge y\sigma z \Rightarrow x\sigma z]$

$\sigma' = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\gamma, \delta)\} \Rightarrow$ μεταβατική που δεν υπάρχουν συνεχόμενα ζευγάρια

Πρόταση

$\sigma : E \to E$ τότε

i) Η σ είναι ανακλαστική $\Leftrightarrow \Delta \subseteq \sigma$

ii) σ συμμετρική $\Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}$

iii) αντισυμμετρική $\Leftrightarrow \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$

iv) σ μεταβατική $\Leftrightarrow \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$

Αποδ

iii) $(\Rightarrow)$

Έστω ότι σ αντισυμμετρική

κ (x, y) τυχόν ζεύγος:

$(x,y) \in \sigma \cap \sigma^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in \sigma \wedge (x,y) \in \sigma^{-1}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \sigma \wedge (y,x) \in \sigma \Leftrightarrow$

$x \sigma y \wedge y \sigma x$

$\xRightarrow{\sigma \text{ αντισ.}} x = y \Rightarrow (x,y) \in \Delta$

$(\Leftarrow)$

Έστω $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$

Θ.δ.ο σ αντισυμμετρική

Έστω

$x \sigma y \wedge y \sigma x \Leftrightarrow (x,y) \in \sigma \wedge (x,y) \in \sigma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y) \in \sigma \wedge (x, y \in \sigma^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \sigma \cap \sigma^{-1}$

$\xRightarrow{\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta} (x,y) \in \Delta \Leftrightarrow x = y$

iv) $(\Longrightarrow)$ Έστω σ μεταβατική

Έστω επιπλέον (x, y) τυχόν

μέλος: $(x, y) \in \sigma \circ \sigma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists z \in E)\ x \sigma z \wedge z \sigma y$

$\xrightarrow{\sigma \text{ μεταβ}}$ $x \sigma y \Leftrightarrow (x, y) \in \sigma$

Άρα $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$

$(\Longleftarrow)$

Έστω $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$

Ο.δ.ο σ μεταβατική

Ας είναι:

$x \sigma z \wedge z \sigma y \Rightarrow (x, y) \in \sigma \circ \sigma$

$\xrightarrow{\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma}$ $(x, y) \in \sigma \Rightarrow x \sigma y$

$\sigma : E \to E$

σχέση ισοδυναμίας στο E

τότε: $\kappa\lambda(a) = \{x \in E : x \sim a\}$

$\sigma = \{(a, a), (\beta, \beta), (\gamma, \gamma), (\delta, \delta), (\epsilon, \epsilon),$
$(\zeta, \zeta), (a, \gamma), (\gamma, a), (\epsilon, \zeta),$
$(\zeta, \epsilon)\}$

$κλ_σ(ε) = \{ε, γ\}$

$κλ_σ(α) = \{α, γ\}$

- ισοδυναμία $(=)$ είναι ανακλαστική + συμμετρική + μεταβατική

- για να έχει κλάση στο σύνολο πρέπει να είναι ισοδυναμία

$κλ_σ(δ) = \{δ\}$, $κλ_σ(β) = \{β\}$

<u>Προτ.</u>

Έστω $\sim$ ισοδυναμία στο E. Τότε για τυχόν τα $α, β \in E$ ισχύουν τα εξής:

α) $κλ_\sim(α) \neq \emptyset$

β) $α \not\sim β \iff κλ_\sim(α) \cap κλ_\sim(β) = \emptyset$

γ) $α \sim β \iff κλ_\sim(α) = κλ_\sim(β)$

<u>Αποδ.</u>

(i) $(\forall α \in E)\ α \sim α \Rightarrow α \in κλ_\sim(α) \neq \emptyset$

(ii) Έστω $α \not\sim β$ κ $κλ_\sim(α) \cap κλ_\sim(β)$

$\neq \emptyset$

Έστω $z \in κλ_\sim(a) \cap κλ_\sim(β)$

Τότε : $z \in κλ_\sim(a) \wedge z \in κλ_\sim(β)$

$\Leftrightarrow z \sim a \wedge z \sim β$

$\overset{\sim \text{ συμμετρ}}{\Rightarrow} a \sim z \wedge z \sim β$

$\overset{\text{μεταβατική}}{\Longrightarrow} (a, β) \in σ$

ή

$a \sim β$ Άτοπο!

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$xσy \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ x - y = 3k$

$(\forall x \in \mathbb{N})\ x - x = 0 = 3 \cdot 0$

Άρα $xσx$

σ ανακλαστική

$xσy \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ x - y = 3k$

Τότε όμως $y - x = -3k$

$= 3(-k)$ όπου $-k \in \mathbb{Z}$ Άρα

$yσx$ Άρα σ συμμετρική

$xσy \wedge yσz \Rightarrow (\exists k_1 \in \mathbb{Z}\ x - y = 3k_1)$

$\wedge (\exists k_2 \in \mathbb{Z} : y - z = 3k_2)$

Άρα $(x-y) + (y-z) = 3k_1 + 3k_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x - z = 3(k_1 + k_2)$$

$$k_1 + k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sigma z$$

$$\kappa\lambda_\sigma(1) = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$$

$$\kappa\lambda\sigma(2) = \{2, 5, 8, 11\ldots\}$$

$$\kappa\lambda\sigma(3) = \{3, 6, 9, 12\}$$